Anais do 14^{O} Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA – XIV ENCITA / 2008
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil, Outubro, 20 a 23, 2008.

UM BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA LÓGICA MATEMÁTICA E O SURGIMENTO DA TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Paulo Marcelo Tasinaffo
Coordenador PIBIC/XIV ENCITA 2008
ITA-IEC Ciência da Computação.
tasinaffo@ita.br

Resumo: *Este artigo, de cunho mais histórico e descritivo do que técnico, fornece um apanhado geral do desenvolvimento histórico da lógica matemática e suas contribuições para o surgimento da teoria da computação e assim, a do próprio computador. Neste sentido, é importante relatar que o pai da inteligência artificial, Alan Turing, é também considerado um dos maiores colaboradores para o surgimento da teoria da computação - ao redor do ano de 1936 e juntamente com o matemático americano Alonzo Church - pois a partir dos trabalhos da completeza e incompleteza de Kurt Gödel propõe e concebe uma máquina de estados ideal ou máquinas de Turing assumindo o fato de que nem tudo pode ser computável e assim refutando a afirmação precipitada de Leibniz, feita ainda no século XVII. É notável o fato de que os princípios básicos da lógica matemática já haviam sido argumentados por Aristóteles e seus discípulos já na Grécia antiga há aproximadamente 250 anos antes de Cristo e tomando um novo rumo a partir de meados do século XIX com os trabalhos pioneiros do inglês George Boole e do alemão Gottlob Frege. No desenrolar deste artigo é dada também uma introdução teórica sobre os cálculos proposicional e de predicados de primeira ordem visando uma compreensão mais detalhada da própria lógica matemática dentro do contexto histórico. Considerações finais a respeito do conceito de inteligência de máquinas são relatadas a partir de exemplo atual da robótica emergente.*

Palavras-chave: *lógica matemática, teoria da computação, cálculo proposicional, cálculo de predicados, teoremas de completeza e incompleteza.*

1. Introdução.

Neste trabalho pretende-se apresentar uma introdução histórica e conceitual sobre a lógica matemática e suas raízes no surgimento da própria filosofia dos gregos antigos, principalmente pela obra de Aristóteles (384 – 322 a.C.), pois ainda hoje a humanidade é influenciada pelos seus pensamentos. Aristóteles é considerado o fundador da ciência, pois organizou e pesquisou conhecimentos de muitos assuntos científicos. Sua obra filosófica sobre lógica chegou até nós através do livro *Organon,* que relata os instrumentos para se proceder corretamente no pensar (Silva Filho, 2000). O significado do termo *Organon* é o de "instrumento" para se proceder corretamente no pensar. O *Organon* é composto de seis tratados (Silva Filho, 2000): 1. "Categorias", 2. "Da Interpretação", 3. "Primeiros Analíticos", 4. "Segundos Analíticos", 5. "Tópicos", 6. "Argumentos Sofídicos". Posteriormente, estes estudos foram denominados *Logike*, resultando finalmente na denominação latina "*Lógica"* (Silva Filho, 2000). Interessante observar que a lógica Aristotélica perdurou por mais de 2300 anos e inegavelmente não pode ser substituída, mas por outro lado pode ser aperfeiçoada e evoluída. Posto isto a lógica matemática – como a conhecemos hoje – através de uma notação matemática formal e axiomática começou a ser estabelecida definitivamente a partir dos trabalhos de George Boole (1815 – 1864 d.C.) publicando em 1854 o livro *Uma Pesquisa Sobre as Leis do Pensamento*. Um fato curioso é o degrau imenso que há no tempo entre Aristóteles e George Boole. Entretanto, um fato mais curioso ainda é o de que hoje se tem um conhecimento extraordinário, sobre a lógica *matemática,* adquirido somente depois da metade do século XIX, embora – no cunho filosófico – a lógica tenha sido desenvolvida desde os primórdios da humanidade, e, neste sentido, a razão estava voltada para a própria sobrevivência.

Pensamentos, raciocínios, inferências e conhecimentos, enquanto processos psicológicos, que se passam na mente do indivíduo, não podem ser objeto de investigação. O que se pode investigar são os frutos de tais processos, ou seja, expressões lingüísticas (Leônidas Hegenberg, 1977). Investigar as relações existentes entre a *razão* e a *lógica* pode ser vista como o modo pelo qual a atividade racional é muitas vezes refletida pela própria lógica ao realizarem-se ligações diretas do pensamento humano com as experiências do mundo. Neste contexto, uma das características da razão é a de poder executar suas atividades a partir de conceitos até certo ponto vagos e inexatos, não exigindo precisão absoluta, mas podendo ser melhorada gradativamente através da linguagem (Newton da Costa, 1978). Entende-se, que neste processo, a perfeição total da razão é, no entanto, inatingível.

É interessante observar que a lógica matemática possui uma notação compacta contendo muitas informações, mesmo quando expressa em poucas linhas, fazendo dela um meio profundo para refletir sobre o pensar, mas ao mesmo tempo tentando economizar pensamento para isto. Este artigo pretende dar uma introdução conceitual e principalmente histórica sobre o desenvolvimento desta disciplina – considerada contemporaneamente – como um ramo importantíssimo da própria ciência. A seção dois deste artigo traz uma descrição histórica e temporal sobre a lógica matemática com ilustrações e fotografias dos principais filósofos gregos e contemporâneos, tais como, Aristóteles, Zenon de Eléia, Blaise Pascal, Leibniz, Russell, entre outros. A seção três traz considerações formais simples sobre os cálculos proposicional e de predicados indicando como transformar uma linguagem natural, como o português ou inglês, para uma linguagem matemática de predicados, sendo esta última - do ponto de vista formal – perfeitamente consistente, enquanto que na primeira nem sempre isto acontece. A seção quatro discute um pouco da importância histórica que o desenvolvimento da lógica matemática trouxe para o desenvolvimento da teoria da computação e o surgimento do próprio computador. A seção cinco discute algumas considerações sobre a inteligência artificial, pois os primeiros trabalhos de teoria de computação são também atribuídos ao pai da inteligência artificial, Alan Turing. A seção seis traz algumas pequenas conclusões e considerações sobre o vasto campo da lógica matemática.

A lógica é uma ciência que estuda as leis do pensamento (João Inácio da Silva Filho).

A ciência das formas do pensamento (Louis Liard , 1846-1917).

A lógica formal, tradicionalmente, diz respeito à análise de sentenças
ou de proposições e da prova com atenção para a forma em abstração
de seu conteúdo (Alonzo Church, 1903 - 1995).

2. Descrição Histórica e Temporal Sobre a Lógica Matemática.

A Introdução do livro *Organon (*Aristóteles 384 a.C. – 322 a.C.*) começa da seguinte forma*: *"Coisas são ditas serem denominadas equivocamente quando, embora elas tenham um nome em comum, a definição correspondente com o nome difere para cada uma delas. Desta forma, um homem real e uma figura, em um quadro, pode ambos poder sustentar o nome animal; ainda que estes sejam equivocamente denominados, para, embora eles tenham um nome em comum, a definição correspondente com os nomes difere entre si...";*
"Por outro lado, coisas são ditas serem denominadas univocamente quando ambas possuírem um nome e uma definição para cada nome em comum. Um homem e um boi são ambos animais, e eles são univocamente denominados, mas também a definição, é a mesma, em ambos os casos: neste sentido, se foi estabelecido uma definição para o homem, a mesma deverá ser válida para o boi...".
A Grécia Antiga e os livros modernos de lógica dos séculos XIX e XX têm muito em comum. Os livros de lógica matemática clássica adotam esta idéia inicial de Aristóteles, da seguinte forma (Stolyar, 1970):
(i) São permitidos sinônimos na lógica matemática (palavras diferentes com mesmo significado);
Exemplo: tanto faz termos os substantivos *casa* ou *lar* para relacioná-las à definição de *a residência de alguém*.
(ii) Não são permitidos heterônimos na lógica matemática (palavra com mais de um significado);
Exemplo: não se pode utilizar a palavra *cometa* para relacioná-las simultaneamente à definição de um *astro no céu* e a um *meio de transporte (a empresa Cometa de transportes por ônibus),* embora na linguagem natural isto seja permitido.
Eis alguns exemplos elucidativos:

Popovic é um astronauta,	*A casa é um lar,*
Encontrei Popovic na rua ontem,	*Mário mora na casa,*
Conseqüentemente; Encontrei uma astronauta na rua ontem.	*Conseqüentemente; Mario mora no lar.*

Alguém inventou o rádio,
Encontrei alguém na rua ontem,
Conseqüentemente; Encontrei o inventor do rádio na rua ontem.

Aristóteles (384 – 322 a.C.) **Euclídes (aproximadamente 300 a.C.)** **Zenón de Elea (490 – 430 a. C.)**

Figura 01 – Três filósofos gregos famosos.

Nas três argumentações anteriores as duas primeiras são válidas, enquanto a última não o é. Entretanto, é notória não só a participação de Aristóteles (fundador da escola Aristotélica) no desenvolvimento da filosofia, da lógica, da matemática e da teoria formal axiomática no período grego antigo, mas também se citam: Euclides (fundador da escola Megárica) e Zenon (fundador da escola dos Estóicos). A figura 01 traz as imagens destes três ilustres filósofos e matemáticos (fonte: biblioteca virtual Wikipédia). As principais diferenças entre essas três escolas são (Leônidas Hegenberg, 1977): a) lógica das classes ou de predicados (aristotélica) e lógica de proposições (Estóico-Megárica); b) Lógica de condicionais expressos na linguagem objeto (Aristotélica) e lógica de inferência e metalinguagem (Estóicos e Megáricos); e c) Notação Estóico-Megárica diferente da Aristotélica.
Além disto, existem três fortes princípios que dão à lógica uma sustentação profunda sobre o real: 1) Princípio da Identidade: **A** é **A**; 2) Princípio do Terceiro Excluído $P \vee \neg P$; e 3)Princípio da Não-Contradição $\neg(P \wedge \neg P)$. O ***Princípio da Identidade*** está fortemente vinculado à ***verdade,*** ou seja, quando algo ocorre jamais se deve negar essa ocorrência. O ***Princípio do Terceiro Excluído*** está fortemente vinculado à ***consistência*** dos acontecimentos, ou seja, ao fato que pelo menos uma das duas proposições P ou $\neg P$ é verdadeira. O ***Princípio da Não-Contradição*** afirma que contradições na lógica não são permitidas. Este princípio está fortemente vinculado ao fato de que ao menos uma das proposições P ou $\neg P$ é falsa. Entende-se aqui por proposição toda sentença lingüística em que se pode atribuir um valor de verdade (1) ou um valor de falácia (0). Por exemplo, a proposição 'A casa é azul' será verdadeira se realmente a casa for azul, mas falsa se a casa for de outra cor. Dando continuidade ao raciocínio, um argumento é composto por n+1 proposições, sendo as n primeiras denominadas premissas do argumento e a última a tese deste argumento, a equação (1) ilustra a representação matemática para ele.

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n}{\psi} \tag{1}$$

Assim, faz-se pertinente à definição formal de ***argumentos válidos*** e ***argumentos inválidos***, ou seja,

Argumento válido é aquele no qual a conclusão será *verdadeira* quando todas as premissas forem *simultaneamente* verdadeiras.

Argumento inválido é aquele no qual a conclusão será *falsa* quando todas as premissas forem *simultaneamente* verdadeiras.

É importante ressaltar o fato de que na lógica matemática preocupa-se com o estudo de encontrar relações matemáticas que sempre conduzam a argumentos válidos. Estas relações são muito importantes do ponto de vista conceitual e por isto recebem o nome de regras de inferência. Um fato histórico curioso e intrigante com respeito aos filósofos gregos e uma questão abordada ainda por eles mesmo, há mais de 2300 anos, é saber quem foi o primeiro filósofo grego. Registros históricos deixados pelos próprios gregos afirmam que o primeiro deles foi Tales de Mileto (624/625 – 556/558 a.C.). A figura 02 traz o retrato artístico do mesmo (fonte: biblioteca virtual Wikipédia).
Tales é apontado como um dos sete sábios da Grécia Antiga. Tales considerava a água como sendo a origem de todas as coisas e que o mundo evoluiu da água por processos naturais. É dele também o famoso "teorema de Tales" da geometria.

Tales de Mileto (624/625 – 556/558)

Figura 02 – Tales de Mileto é considerado o primeiro filósofo grego.

É atribuído a Euclides a obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Este documento relata a geometria Euclidiana em profundidade e que vigorou por mais de 2300 anos na história de desenvolvimento da matemática, refutada pela primeira vez somente pelo matemático Gauss na metade do século XIX. Esta obra é dividida em treze livros, sendo que o início do primeiro livro segue abaixo, sendo esta, uma tradução realizada pelo autor deste artigo, a partir da enciclopédia *Great Books of The Western World*.

As Origens Gregas da Geometria.

- The Thirteen Books of Euclid's Elements

Os treze Livros dos Elementos de Euclides.

Book I. Inicia-se com as definições dos 23 postulados da geometria Euclidiana.
1. Um *ponto* é aquilo que não tem parte.
2. Uma *linha* possui comprimento, mas não é dotada de largura.
3. As *extremidades de uma linha* são pontos.
4. Uma *linha reta* é uma linha que existe sempre emparelhada com os pontos sobre si mesma.
5. Uma *superfície* é aquela que possui comprimento e largura somente.
6. As *extremidades de uma superfície* são linhas.
7. Uma *superfície plana* é uma superfície que existe com as linhas retas sobre si mesma.
...
13. Um contorno é aquilo que está em uma extremidade de qualquer coisa.
14. Uma figura é aquilo que está contido ou delimitado por qualquer contorno ou contornos.
15. Um círculo é uma figura plana contornada por uma linha tal que todas as linhas retas que caindo sobre ele até um ponto – entre todos aqueles que faz existir tal figura – são iguais entre si;
16. E a este ponto é denominado o centro do círculo.
...
23. Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando num mesmo plano e sendo produzidas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram em nenhuma direção.

POSTULADOS

Admita os seguintes serem postulados:
Desenhar uma linha reta de qualquer ponto para qualquer ponto.
Produzir uma linha reta finita indefinidamente em uma linha reta.
Descrever um círculo com qualquer centro e distância.
Todos aqueles ângulos retos são iguais um ao outro.

NOÇÕES COMUNS
Coisas que são iguais para a mesma coisa são também iguais entre si.
Se igualdades são adicionadas para igualdades, o conjunto total será igual.
Se igualdades são subtraídas de igualdades, o remanescente será igual.
Coisas que coincidem com uma outra são iguais entre si.
O todo é maior que a parte

LIVRO I. PROPOSIÇÕES.
PROPOSIÇÃO 01
Sobre uma dada linha reta finita construir um triângulo eqüilátero.
DEMONSTRAÇÃO:
[Hipótese] Admita AB ser a dada linha reta finita.
Desta forma, é requerido construir um triângulo eqüilátero sobre a linha reta AB.
[Postulado 3] com o centro A e distância AB admita o círculo BCD ser descrito;
[Postulado 3] novamente, com o centro B e distância BA admita o círculo ACE ser descrito;
[Postulado 1] e do ponto C, em que os círculos cortam um ao outro, para os pontos A, B admita as linhas retas CA, CB serem unidas;
[Definição 15] agora, uma vez que o ponto A é o centro do círculo CDB, AC é igual a AB;
[Definição 15] novamente, uma vez que o ponto B é o centro do círculo CAE, BC é igual a BA;

[Noções Comuns 4] Como coisas que coincidem com uma outra também são iguais uma como a outra, então AB é igual a BA;
[Noções Comuns 1] Como AC já foi provado ser igual a AB;
Como BC já foi provado ser igual a BA;
Como AB já foi provado ser igual a BA;
Então,
AC é igual a BC.
Portanto, as três linhas retas CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é eqüilátero; e isto foi construído sobre uma dada linha reta finita AB.
Aqui termina a primeira demonstração no primeiro livro de Euclides. Este livro continua demonstrando proposições até a quadragésima oitava, quando então passa para o segundo livro, e assim por diante, até finalizar o décimo terceiro livro.

PROPOSIÇÃO 2
...
PROPOSIÇÃO 48

Do ponto de vista histórico a obra de Euclides é considerada a primeira abordagem *formal* e *axiomática* encontrada na história da matemática e que os matemáticos começaram a levar a sério e a desenvolvê-la a fundo somente a partir do século XIX. Para finalizar a exposição com relação aos principais filósofos e matemáticos gregos cita-se Zenon de Eléia (490 – 460 a.C.). Filósofo grego da escola de Elea e discípulo de Parmédines. É famoso por conceber o método de demonstração matemática por contradição. Relatos históricos indicam que na época ele concebeu mais de 20 exemplos de demonstrações por absurdo e que só chegaram até nós oito deles. Neste artigo citam-se três: 1) o paradoxo do coelho e da tartaruga; 2) o paradoxo do Arco e da Flecha; e 3) o paradoxo do menor dos segmentos. A figura 03 ilustra cenas de desenho animado de Walt Disney em que a tartaruga – sendo mais lenta que o coelho, mas que saindo na frente dele – nunca poderá ser alcançada. A figura 04 traz uma demonstração simples por redução ao absurdo e também proposta por Zenon de Eléia para demonstrar que o menor dos seguimentos não existe.

Figura 03 – O paradoxo da Tartaruga e do coelho proposto por Zenon de Eléia.

Na era moderna tem-se uma correspondência de 1654 entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat que deu origem à teoria das probabilidades, como nova disciplina da matemática. Entretanto, talvez um dos feitos mais marcantes de Blaise Pascal foi ter inventado a primeira máquina automática de calcular (dispositivos mecânicos) para as operações aritméticas de adição e multiplicação. Pascal deixou alguns pensamentos numerados e impressos em papel antes de morrer, dois deles – bastante interessantes – são citados a seguir: *339 – Posso conceber um homem sem mãos, pés, cabeça (pois só e experiência nos ensina que a cabeça é mais necessária do que os pés); mas não posso conceber o homem sem pensamento: seria uma pedra ou um animal. 340 – A máquina aritmética produz efeitos que se aproximam* *mais do pensamento do que tudo o que fazem os animais; mas não faz nada que possa levar-nos a dizer que tem vontade como os animais (Enciclopédia os Pensadores, 1973).*

Regras de Redução ao Absurdo

1. **Hipótese Provisória [H]:** "Existe o menor dos segmentos (RM)"
2. Se (RM) é o menor dos segmentos ele preenche "com duas folgas" duas linhas consecutivas de qualquer escala de qualquer régua.

3. As duas novas folgas poderão ser preenchidas por mais dois segmentos (RM) gerando novas 4 folgas e assim até o infinito.

4. Assim, o menor dos segmentos caberá INFINITAS VEZES sobre qualquer duas linhas consecutivas de qualquer escala de qualquer régua.
5. Logo, "o MENOR segmento" também é "o MAIOR segmento". Assim, a hipótese inicial ou provisória "Existe o menor dos segmentos (RM)" é falsa. Por exclusão, "Não existe o menor dos segmentos (RM)".

"Existe o menor dos segmentos(RM)" **[H]**

⋮

"(RM) é o MENOR segmento" E "(RM) é o MAIOR segmento"

"Não existe o menor dos segmentos (RM)"

Generalizando a regra por Redução ao Absurdo:

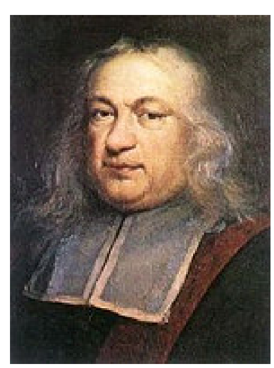
$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \quad [H] \\ \vdots \\ \psi \wedge \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}$$

($\neg^{+}$) ou (RA^{+}) **(Regra Primitiva)**

Redução ao Absurdo

Figura 04 – Paradoxo de Zenon de Eléia que demonstra não existir o menor dos seguimentos.

Blaise Pascal
(19 de junho de 1623 – 19 de agosto de 1662)



Pierre de Fermat
(17 de agosto de 1601 – 12 de janeiro de 1665)

Figura 05 – Blaise Pascal e Pierre de Fermat eram amigos e fundaram o ramo da matemática denominada teoria das probabilidades.

,

O reverendo Thomas Bayes tem sua obra publicada postumamente em 1763 a respeito da regra de Bayes. Segundo Bayes – que introduziu o conceito de probabilidades condicionadas – se: (i) é dada a probabilidade de se ter dor de pescoço; (ii) é dada a probabilidade de se ter meningite; e (iii) é dada a probabilidade de se ter dor de pescoço dado que alguém já tenha meningite então, é possível obter-se a partir desta três primitivas: (iv) a probabilidade de ter meningite dado que alguém já tenha dor no pescoço, entre muitos outros exemplo. Seu trabalho foi retomado em meados do século XX para se desenvolver a lógica probabilística. A figura 06 traz uma pintura do reverendo Thomas Bayes.

Thomas Bayes
(1702? – 17 de abril de 1761)

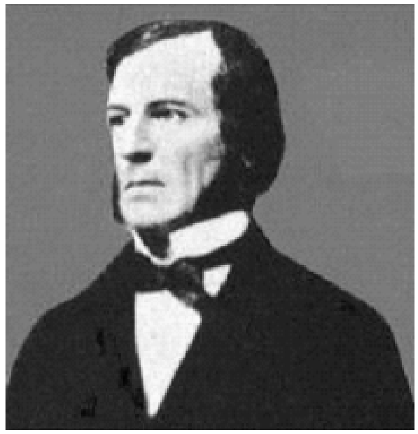
Figura 06 – Thomas Bayes foi um matemático inglês e um pastor presbiteriano pertencente à minoria calvinista na Inglaterra e foi eleito membro da *Royal Society* em 1712.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) era alemão e divide o crédito com Isaac Newton a respeito da descoberta e origens do Cálculo Diferencial e Integral. Realizou pequenas contribuições analíticas para o desenvolvimento da lógica matemática que iriam deslanchar definitivamente em 1847 com George Boole retomando seu trabalho. Entretanto, utilizava uma notação muito complicada para ser compreendida. Além disto Inventou uma máquina mecânica de calcular para as operações de multiplicação e divisão.

Gottfriend Wilhelm Leibniz
(1 de julho ou 21 de junho de 1646 – 14 de novembro de 1716)

Figura 07 – Leibniz acreditava que a razão poderia ser convertida em números, e assim, podendo ser computada.

Finalmente é chegada à época da lógica moderna, podendo ser datada pelo ano de 1847 com o matemático inglês George Boole (1815-1864) que começara a criar apropriadamente a lógica matemática. Entretanto, deve-se ressaltar que muitos dos aspectos da lógica matemática que vieram somente à tona a partir deste ano já eram velhos conhecidos da filosofia desde as épocas de Aristóteles. Entre os principais feitos de George Boole (Leônidas Hagenberg, 1977), citam-se: 1) Introduziu o primeiro sistema completo e funcional de lógica formal em seu livro The Mathematical Analysis of Logic de 1847; 2) Publicou em 1854 o livro "Investigations of the laws of thought" que compara as leis do pensamento às leis da álgebra; e 3) Estabeleceu que '1' representa a classe de todos os objetos (o universo) e o '0' representa a classe a que nenhum objeto pertença (classe vazia) e enuncia o princípio da não-contradição: "nenhum objeto pode ter duas propriedades contraditórias".



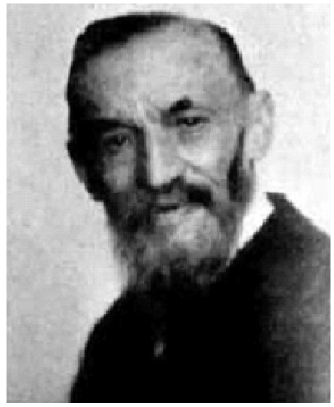
George Boole
(2 de novembro de 1815 – 8 de dezembro de 1864)
Figura 08 – Primeiro grande lógico moderno e de nacionalidade inglesa.

Ao contrário de George Boole, que era inglês, Gottlob Frege (1848 a 1925) era alemão. Deve-se ressaltar que a obra do primeiro ainda estava bastante incompleta, precisando de aperfeiçoamentos. Entre as principais contribuições de Gottlob Frege citam-se (Leônidas Hegenberg, 1977): 1) primeiro trabalho importante publicado em 1879, intitulado "Escrita de Conceitos" que relata a primeira exposição completa da lógica proposicional moderna (e da lógica de primeira ordem); 2) primeira descoberta: o cálculo Sentencial ou de Proposições; 3) distinguiu as premissas (bases de um raciocínio) e as regras de inferência; 4) o uso de símbolos foi adotado por Frege; e 4) a verdadeira lógica de primeira ordem data da introdução de quantificadores no trabalho de Frege de (1879).

Friedrich Ludwig Gottlob Frege
(8 de novembro de 1848 – 26 de julho de 1925)
Figura 09 – Matemático alemão e criador dos quantificadores para a Lógica Matemática.

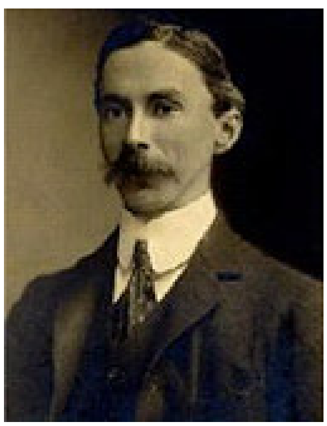
Para finalizar o século XIX - listando os três maiores lógicos daquele século - tem-se as obras de Giuseppe Peano (1859-1932) que conseguiu elaborar um notação matemática mais simples que a de Frege e que é utilizada até os dias de hoje. Criou a notação atual para a lógica de primeira ordem em 1889 e é criador também da axiomatização da Aritmética. Além de Gottlob Frege, o matemático Charles Sanders Peirce também desenvolveu a lógica de primeira ordem independentemente de Frege, embora mais tarde em 1883. A entrada do século XX traz muitas perspectivas para o desenvolvimento não só da física como da matemática aplicada e formal. Bertrand Russell (1872 – 1970) juntamente com Alfred Whitehead (1861 - 1947) publicam *Os Principia Mathematica* (três volumes de 1910 até 1913). Dá-se início aos surgimentos dos paradoxos dentro da lógica embora ainda nesta época acreditava-se ser possível reduzir a matemática à lógica.

Bertrand Russell e Whitehead em 1902 e Leopold Löwenheim em 1915 concebem artigo que trata do símbolo de igualdade dentro da lógica de primeira ordem. Hoje conhecidos como princípios da identidade e da substituibilidade, respectivamente, a introdução da igualdade e a eliminação da igualdade num sistema dedutivo com predicados de primeira ordem. Ludwing Wittgenstein em 1922 e Emil Post em 1921 estabeleceram a validade ou não de sentenças proposicionais através das tabelas-verdade na lógica proposicional. Com Alfred Tarski em 1935 e em 1956, através da teoria de conjuntos dá-se uma definição explícita de verdade e de satisfação em lógica de primeira ordem. Newel, Shaw e Simon, em 1957, realizam o primeiro programa de computador para inferência lógica, que foi denominado de *logic theorist.* Mccarthy em 1958 foi o principal responsável pela introdução da lógica de primeira ordem como uma ferramenta útil na construção de sistemas de inteligência artificial, e a lógica de primeira ordem demonstra ser uma linguagem de representação muito mais poderosa que a lógica proposicional.

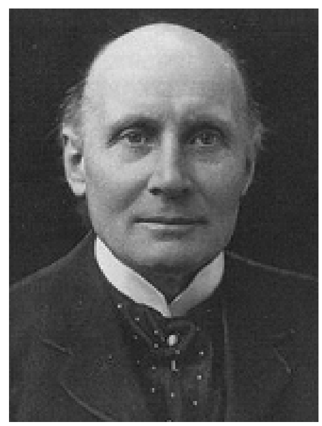


Giuseppe Peano
(27 de agosto de 1858 – 30 de abril de 1932)

Figura 10 – Giuseppe Peano era matemático Italiano e criador do princípio da indução. Sabe-se hoje que ao introduzir este principio na lógica de predicados, recai-se na aritmética de Peano. Conceitualmente a diferença entre a lógica de predicados de primeira ordem e a aritmética de Peano é bastante significativa. Segundo os teoremas de Kurt Gödel formulados em 1930 e 1931, a primeira é dotada de *completeza* enquanto a segunda de *incompleteza*.



Bertrand Arthur Willian Russell
(18 de maio de 1872 – 2 de fevereiro de 1970)



Alfred North Whitehead
(15 de fevereiro de 1861 – 30 de dezembro de 1947)

Figura 11 – Autores da obra monumental *Os Principia Mathematica* (três volumes de 1910 até 1913).

3. Considerações Formais Simples Sobre os Cálculos Proposicional e de Predicados.

Uma teoria formal do ponto de vista matemático deve sempre ser desenvolvida em forma de axiomas. Axiomas são propriedades matemáticas assumidas como verdadeiras sem a necessidade de serem demonstradas, em geral, por serem muito simples. A partir destes axiomas – desde que bem elaborados e bem formulados – pode-se derivar de forma consistente novas propriedades ou teoremas. Por exemplo, dentro da teoria dos números reais, as propriedades $x+0=x$, $x.1=x$, $x+y = y+x$ e $x.y=y.x$ são consideradas axiomas desta teoria, pois de tão elementares e simples que são, é impossível querer demonstrá-las. Por outro lado, por exemplo, a fórmula de Báskara para o cálculo das raízes de um polinômio de segundo grau já seria um teorema, dada a necessidade de demonstrá-la a partir dos axiomas completos existentes para os números reais.

A figura 12 esquematiza de maneira bastante simplificada o processo básico para realizar demonstração matemática, enquanto que a figura 13 ilustra o processo básico para gerar teoremas a partir de axiomas. Como existem diferenças básicas, entre a matemática e a lógica, em geral, para, o primeiro, este processo dá-se o nome de *dedução* ou *demonstração*, enquanto, para o segundo, se prefere os termos *inferido* ou *derivado*.

Figura 12 – Descrição sucinta e descritiva do processo para geração teoremas.

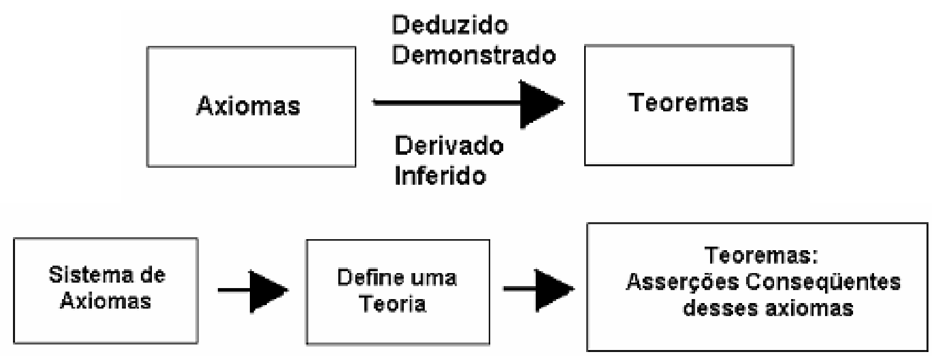


Figura 13 – Processo de gerar teoremas a partir de axiomas.

Além dos três princípios da lógica matemática e das definições de proposição e argumentos – dados na seção anterior – a lógica matemática se recente de algumas definições adicionais para ser elaborada de forma consistente e adequada para representação de objetos e relações entre objetos do mundo real. A tabela 1 identifica os principais operadores lógicos utilizados na lógica matemática. Somente os cinco primeiros operadores da tabela 1 pertencem ao universo do cálculo proposicional. Os dois últimos operadores da tabela 1 são denominados, respectivamente, quantificadores universal e existencial e são de uso exclusivo do cálculo de predicados. A tabela 2 identifica como estabelecer a sintaxe do cálculo de predicados, ou seja, como elaborar proposições complexas a partir de proposições simples ou atômicas combinando os cinco primeiros operadores lógicos. A tabela 3 identifica a tabela verdade primitiva adotada pelo cálculo de predicados.

Tabela 1 – Definição dos símbolos dos conectivos e dos quantificadores lógicos.

Símbolo, leitura	**Operação lógica**	**Alternativos**
$\wedge$, e	conjunção	$\&, \cdot$
$\vee$, ou	disjunção	$+$
$\neg$, não	negação	$\sim$, -, $\bar{\ }$
$\rightarrow$, se..., então	condicionalidade	$\Rightarrow, \supset$
$\leftrightarrow$, se e só se	bicondicionalidade	$\Leftrightarrow, \equiv$
$\forall$, para todo	quantificacão universal	Π, ( )
$\exists$, existe	Quantificação existencial	Σ, E

Tabela 2 – Elaboração de proposições compostas através dos operadores lógicos.

$(\varphi \wedge \psi)$	É a proposição conjunta e lê-se " φ e ψ"
$(\varphi \vee \psi)$	É a proposição disjunta e lê-se " φ ou ψ"
$\neg \varphi$	É a negação de φ e lê-se "não φ " ou "não se tem φ "
$(\varphi \rightarrow \psi)$	É a proposição condicional (ou **implicação material**) com antecedente φ e conseqüente ψ e lê-se "se φ , então ψ", " ψ, se φ ", " φ implica (materialmente) ψ"
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	É a proposição bicondicional (ou **equivalência material**) e lê-se " φ sse ψ", " φ é equivalente (materialmente) a ψ"

Tabela 3 – Tabelas de verdade dos conectivos.

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	O
1	1	1	1	1	1

Assim, seja Σ um conjunto de proposições, e ψ uma proposição. Diz-se então, que ψ é conseqüência (lógica ou semântica) de Σ; e se escreve (Franco de Oliveira, 2004):

$$\Sigma \models \Psi \tag{2}$$

sse ψ é verdadeira sempre que as proposições de Σ forem simultaneamente verdadeiras. (**Nota**: a expressão "sse" é uma abreviatura de "se e só se", ou de "se e somente se"). Assim, ao serem comparadas as definições de argumento válido e de conseqüência lógica pode-se concluir de imediato que um argumento $\dfrac{\varphi_1, \cdots, \varphi_n}{\psi}$ é valido sse $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \models \psi$. Neste sentido, explicar a forma lógica de uma proposição φ é explicar o modo como essa proposição é formada ou construída, a partir de proposições (ou condições) mais simples, por meio de certas operações lógicas.

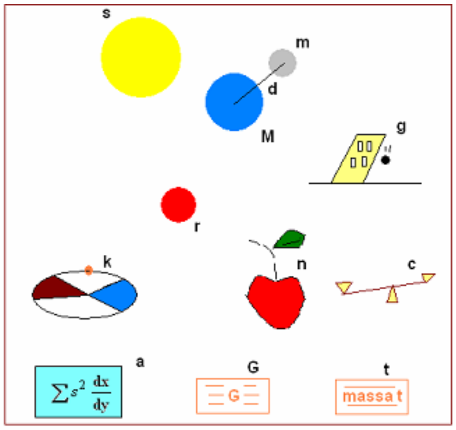
A lógica clássica apresenta dois níveis de análise: o nível proposicional e o nível quantificacional. No nível proposicional a questão fundamental é elaborar uma metodologia para elaborar proposições compostas a partir de proposições mais simples através dos conectivos proposicionais. No nível quantificacional (Franco de Oliveira, 2004) a análise é mais profunda, pois as preposições são analisadas na sua estrutura gramatical interna, ou seja, na relação sujeito-predicado, na ligação das variáveis dos quantificadores, etc. O nível proposicional apresenta as seguintes características: **1)** As letras latinas p, q, r,... são utilizadas para representar proposições simples;**2)** As letras gregas $\varphi, \psi, \theta, ...$ são utilizadas para representar proposições simples ou compostas; **3)** Os conectivos $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ são os operadores que atuam sobre as proposições simples e produzem proposições compostas, por exemplo, como indicado nas tabelas 2 e 3.

Como último conceito lógico básico está o de inferência lógica. Sucintamente, a inferência nada mais é do que regras específicas aplicadas sobre premissas pré-estabelecidas em que garantirá sempre a existência de *argumentos válidos* e conseqüentemente o de conseqüência lógica ou semântica. Para cada conectivo lógico há pelo menos duas ou três regras de inferência para introdução ou eliminação do mesmo. Na *introdução* de um conectivo, a preocupação está em que premissas podem-se tirar uma conclusão em que ocorre o conectivo. Na *eliminação*, que conclusões podem ser tiradas de premissas em que ocorre o conectivo em questão. Em termos práticos há uma lista imensa de tais regras dentro do cálculo proposicional e de predicados. Entretanto aqui, para fins ilustrativos e aplicados citam-se – conforme a tabela 04 indica - as regras de introdução e eliminação do condicional do cálculo proposicional, sendo, esta última, conhecida como *Modus Ponens*.

Tabela 04 – Exemplo de Regras de Inferências Primitivas.

Condicional	Eliminação (Regra Primitiva)	$(\rightarrow^-)$ ou (MP) Modus Ponens	$\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
Condicional	Introdução (Regra Primitiva)	$(\rightarrow^+)$ Método Direto Hipótese auxiliar [H] A própria premissa é uma derivação	$\varphi \quad [H]$ $\vdots$ $\dfrac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi}$

A figura 14 exemplifica um exemplo bastante simples, mas ao mesmo tempo, bastante elucidativo para compreender como se desenvolve um raciocínio lógico dentro da lógica matemática e como transformar conhecimentos da linguagem natural para correlacioná-lo nos moldes da notação do cálculo de predicados. Na figura 14 faz-se uma ilustração didática e esquemática a respeito de proposições simbólicas que pretendem de uma forma racional reconstituir formalmente a história da gravitação na época de Galileu, Kepler e Newton. A figura 15 ilustra como utilizar regras básicas de inferência – incluindo Modus Ponens – para inferir informações adicionais sobre a base de dados primitiva ou sistema de hipóteses (H) inicial.



M: ‘A Terra existe.’
m: ‘A lua existe.’
r: ’Marte existe.’
s: ’O sol existe.’
d: ’A distância d é maior que r+R’
g: ‘Galileu mede a aceleração gravitacional da Terra.’
k: *‘As leis de kepler são coerentes.’*
a: ‘Isaac Newton desenvolve uma versão válida do cálculo diferencial.’
n: ‘A lei de Isaac Newton da gravitação universal são válidas.’
c: ‘Aplica-se as leis de Newton no experimento da balança de Cavendish.’
G: ‘A constante universal da gravitação expressa num pedaço de papel.’
t: ‘A massa da Terra expressa num pedaço de papel.’

Figura 14 – O cálculo proposicional é capaz de relacionar *fatos* do mundo real a partir das regras de formação de proposições compostas a partir de proposições atômicas e adicionalmente aplicar regras de inferências bem específicas e consistentes sobre um sistema de hipótese, podendo assim gerar assim fatos novos.

A figura 14 sugere então o seguinte problema enunciado: *Se forem relacionadas nos dias de hoje o conjunto de proposições da mesma forma como ocorreu na história da humanidade, poder-se-á derivar novamente a descoberta da massa da Terra simplesmente re-observando os fenômenos da natureza?* Re-estabeleça essa ordem utilizando a notação e as regras de inferência do cálculo proposicional. Assim, a figura 15 fornece uma solução para este problema dentro dos moldes da linguagem proposicional.

Método de Dedução

{1}	1	$(M \wedge r) \wedge (s \wedge m)$	H
{2}	2	$M \wedge m \rightarrow d$	H
{3}	3	$M \rightarrow g$	H
{4}	4	$(M \wedge r) \wedge s \rightarrow k$	H
{5}	5	$(k \wedge a \wedge d) \rightarrow n$	H
{6}	6	$n \rightarrow c$	H
{7}	7	$g \wedge c \rightarrow G$	H
{8}	8	$G \rightarrow t$	H
{9}	9	a	H
{10}	10	d	H
{1}	11	$(M \wedge r)$	$1(\wedge_1^-)$
{1}	12	$s \wedge m$	$1(\wedge_2^-)$
{1}	13	s	$12(\wedge_1^-)$
{1}	14	$(M \wedge r) \wedge s$	$11, 13(\wedge^+)$
{1, 4}	15	k	14,4(MP)
{1, 4, 9}	16	$k \wedge a$	$9,15(\wedge^+)$
{1, 4, 9, 10}	17	$k \wedge a \wedge d$	$16,10(\wedge^+)$
{1, 4, 5, 9, 10}	18	n	17,5(MP)
{1, 4, 5, 6, 9, 10}	19	c	18,6(MP)
{1}	20	M	$11(\wedge_1^-)$
{1, 3}	21	g	20,3(MP)
{1, 3, 4, 5, 6, 9, 10}	22	$g \wedge c$	$19,21(\wedge^+)$
{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10}	23	G	22,7(MP)
{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10}	24	t	23,8(MP)

$$(M \wedge r) \wedge (s \wedge m), M \rightarrow g, (M \wedge r) \wedge s \rightarrow k, (k \wedge a \wedge d) \rightarrow n, G \rightarrow t, n \rightarrow c, a, d \vdash t$$

Figura 15 – Sistema dedutivo elaborado a partir das hipóteses – ilustradas graficamente na figura 14 – para reproduzir o experimento de medir a massa da Terra. Observe principalmente a utilização da regra de inferência *Modus Ponens*.

No segundo nível de análise das proposições a ligação *sujeito-predicado* (Smullyan, 1995) é o componente principal. Toda proposição é composta por indivíduos que estão em certa relação (predicado) com outros. Por exemplo, “Vidro é transparente”, “João ama Maria” e “5 está entre 1 e 7” (Franco de Oliveira, 2004). A tabela 5 indica como separar os sujeitos dos predicados. Em geral uma convenção também deve ser utilizada para representação de constantes, variáveis e predicados. A tabela 5 indica uma possível solução para isto. A figura 16 ilustra um exemplo bastante interessante tirado do livro do matemático americano W. V. Quine (Franco de Oliveira, 2004).

Tabela 05 – Construção lógica de diferenciação de sujeito e predicado numa dada proposição.

Indivíduos (os sujeitos)	Os predicados e as relações	Tipo de predicado
Vidro	... é transparente	unário ou aridade 1
João, Maria	... ama ...	unário ou aridade 2
5, 1, 4	... está entre ... e ...	unário ou aridade 3

Exemplo para o Cálculo de Predicados
(Concebido pelo lógico americano W. V. Quine)

Interpretação:

Domínio: pessoas
Px: x sabe a senha de passagem
Qx: x rouba munições
a: general b: sentinela

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow x = a \lor x = b) \quad \exists x(Px \land Qx)}{Qa \lor Qb}$$

Somente o general e a sentinela sabem a senha de passagem
Alguém que sabe a senha de passagem rouba munições
O General ou a Sentinela rouba munições

Figura 16 – O cálculo de predicados é bem mais geral que o proposicional, pois a utilização de quantificadores aliada à análise interna das proposições em nível de predicado e objeto faz do cálculo de primeira ordem uma ferramenta poderosa para representar relações entre *fatos* e *objetos* do mundo real.

A lógica de primeira ordem é suficientemente expressiva para representar de forma satisfatória o *conhecimento comum*. E além disto, ela é muito mais expressiva que a lógica proposicional. A linguagem da lógica de primeira ordem é elaborada em torno de objetos e relações (Russell e Norvig, 2004). A principal diferença entre lógica proposicional e a lógica de primeira ordem reside no compromisso *ontológico* (o que elas pressupõem sobre a natureza da realidade) feito por cada linguagem. Na lógica proposicional pressupõe-se que existem fatos que são válidos ou não válidos no mundo. A lógica de primeira ordem considera que o mundo consiste em objetos com certas relações entre eles que são ou não válidas. Por outro lado, o compromisso *epistemológico* reflete os estados possíveis de conhecimento que ela permite a respeito de cada fato. A tabela 6 resume adequadamente o que é exposto neste parágrafo.

Tabela 06 – Diferenças relevantes entre proposições e predicados.

Linguagem	Compromisso Ontológico	Compromisso Epistemológico
Lógica Proposicional	Fatos	1, 0 ou Desconhecido
Lógica de Primeira Ordem	Fatos, Objetos e Relações	1, 0 ou Desconhecido
Lógica Temporal	Fatos, Objetos, Relações e Tempos	1, 0 ou Desconhecido

Para o cálculo de predicados são válidas todas as condições estabelecidas para o cálculo proposicional (Hegenberg, 1973) e mais algumas relacionadas aos predicados e quantificadores. A lógica de primeira ordem (ou cálculo de predicados) é mais rica do que o cálculo proposicional devido as seguintes características: 1) mais símbolos no alfabeto; 2) uma gramática mais complexa. A lógica de primeira ordem tem um poder expressivo bem maior, possuindo símbolos lógicos e símbolos não-lógicos. Os símbolos lógicos são: 1) conectivos proposicionais $\land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$; 2) os quantificadores $\forall, \exists$; 3) os parênteses (e); 4) as variáveis individuais x, y, z, ...; 5) o símbolo de igualdade =; 6) os parâmetros (ou nomes arbitrários) α, β, γ, ... Por sua vez, os símbolos não-lógicos são: 1) símbolos predicativos ou relacionais P, Q, R,... (denotam predicados e relações); 2) constantes individuais a, b, c,... (denotam objetos ou indivíduos fixos); 3) símbolos funcionais ou operacionais f, g, h,... (denotam funções ou operações). Além destes, podem ocorrer os símbolos especiais (<, >, ∈ ,...) que não são utilizados no cálculo de predicados, mas podem aparecer, por exemplo, na aritmética de Peano. A figura 17 ilustra como o cálculo proposicional, o cálculo de predicados e a aritmética de Peano se relacionam. Um fato aparentemente simples, mas profundo - do ponto de vista teórico - é o da introdução do axioma da indução levar a problemas de *incompleteza* quando se pretende obter a representação da aritmética a partir do cálculo de predicados. Esta problemática será abordada historicamente na seção seguinte.

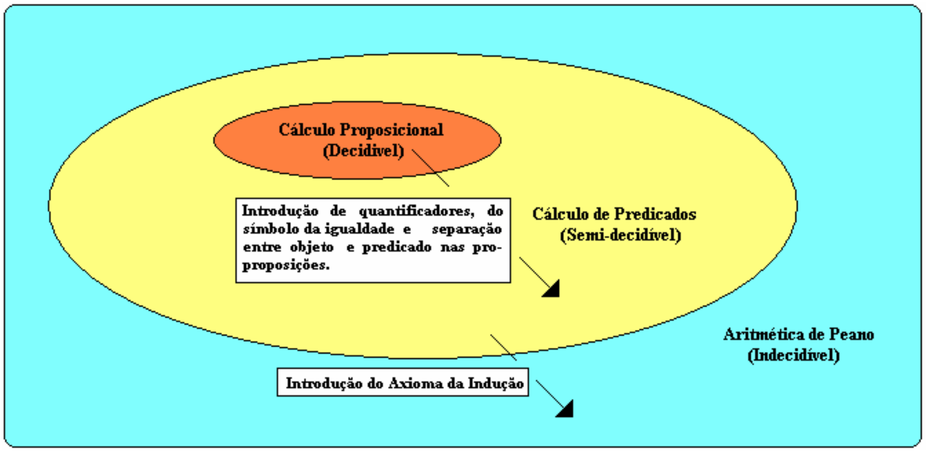


Figura 17 – Cálculos proposicional e de predicados e a aritmética de Peano.

A figura 18 ilustra o papel semântico (estabelecimento de significados lógicos) na representação do mundo real através de predicados de primeira ordem. Para uma base consistente e bem elaborada o processo de inferência leva a fatos verdadeiros do mundo real.

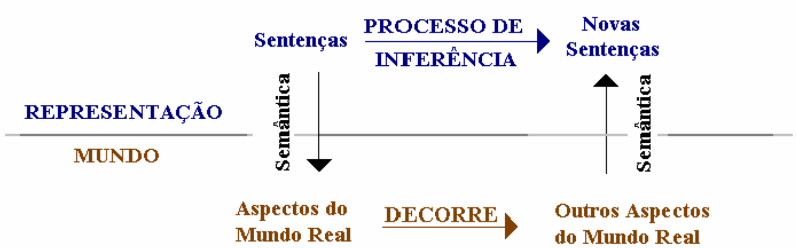


Figura 18 – Equivalência entre a abstração lógica e sua correspondência com os eventos do mundo real

4. Importância Histórica do Desenvolvimento da Lógica Matemática para o Desenvolvimento da Teoria da Computação.

Os procedimentos de provas para predicados são completos. Algumas implicações disto são: 1) Todas as conjecturas poderão ser estabelecidas mecanicamente; 2) Todo teorema poderá ser estabelecido como uma conseqüência lógica de um conjunto de axiomas fundamentais num número finito de passos. O cálculo de predicados é completo devido ao teorema demonstrado por Kurt Gödel em 1930. Por outro lado, a introdução do axioma da indução no cálculo de predicados conduz a incompleteza na aritmética, – fato este – também demonstrado por Kurt Gödel, mas em 1931. A seguir enunciam-se os teoremas em questão. Para saber mais sobre o teorema da incompleteza ver, por exemplo, Nagel e Newman, 2001 ou Kurt Gödel, 1992 (reedição do trabalho original pela *Dover Publications*).

<u>Teorema da Completeza (Gödel, 1930):</u> qualquer sentença que é conseqüência lógica tem uma prova finita para a lógica de primeira ordem.

<u>Teorema da Incompleteza (Gödel, 1931):</u> um sistema lógico que inclua o princípio da indução necessariamente é incompleto. Por conseguinte, existem em tais sistemas conseqüências lógicas, mas que, não têm nenhuma prova finita dentro do sistema.

Em sintaxe, *estendendo um pouco a linguagem de primeira ordem para permitir o uso do esquema de indução em aritmética, Gödel conseguiu mostrar, em seu teorema de incompleteza, que existem sentenças aritméticas verdadeiras que não podem ser provadas.*
Primeiro Metateorema da Incompleteza de Gödel: Se os axiomas de Aritmética de Peano (AP) são verdadeiros, então existem verdades que não são teoremas. Em outras palavras, se os teoremas de (AP) são verdadeiros, então (AP) é incompleta, ou seja, *pode-se derivar em (AP) verdades que não são teoremas.*
Segundo Metateorema da Incompleteza de Gödel: Se T é uma teoria com um sistema decidível de axiomas, contendo a aritmética de Peano, e é consistente, então existe uma sentença aritmética α que exprime "T é consistente", que não é teorema de T. Esta é uma *generalização da Incompleteza para a matemática, como um todo.*
Metateorema de Tarski: O conjunto das verdades aritméticas não é aritmeticamente definível.
Os trabalhos de Kurt Gödel de 1930 e 1931 repercutem até hoje na matemática. Gödel era austríaco e muito amigo de Albert Einstein. A figura 19 traz fotos dele com o físico alemão.

A natureza da fé (Hebreus 11.1 e 11.3): Ora, a fé é a certeza de coisas que se esperam, a convicção de fatos que se não vêem. Pela fé, entendemos que foi o universo formado pela palavra de Deus, de maneira que o visível veio a existir das coisas que não aparecem.

Kurt Gödel
(28 de abril de 1906 – 14 de janeiro de 1978)
Figura 19 – Kurt Gödel e Albert Einstein lecionavam juntos na universidade de Princeton.

Kurt Gödel nasceu na república Tcheca em 1906 e faleceu em 1978 em Princeton, EUA onde lecionou por vários anos e tinha como vizinho acadêmico o físico Albert Einstein. Um filme americano intitulado *A Teoria do Amor* (1994) conta a história da sobrinha de Albert Einstein e de um mecânico de automóvel que se apaixona por ela. Neste filme, Einstein (interpretado pelo ator Walter Matthau) torna-se amigo do mecânico para tentar ajudá-lo a conquistar sua sobrinha. Neste filme os atores interpretam Albert Einstein e Kurt Gödel em reuniões familiares. Kurt Gödel obteve seu doutorado em 1929 na universidade de Viena e o teorema de Gödel encerrou 100 anos por uma base axiomática completa para a matemática, que já haviam sido especuladas por Hilber, Russell, entre outros, tornando-a, depois disto, impossível de concebê-la. O teorema da incompleteza é considerado um dos dez mais importantes teoremas provados, considerando-se qualquer área da ciência. Kurt Gödel chegou a trocar algumas correspondências com o matemático Jacques Herbrand (1908 - 1931). A foto de Herbrand pode ser vista na figura 20.

Jacques Herbrand
(12 de fevereiro de 1908 – 27 de julho de 1931)
Figura 20 – Jacques Herbrand em uma de suas últimas fotos.

Jacques Herbrand foi um matemático francês que nasceu em Paris, França e morreu em La Bérarde, Isêre, França. Seus trabalhos incluíam estudos e contribuições para a lógica matemática e a teoria dos corpos de classes. O teorema de Herbrand é o resultado da sua tese de doutorado em teoria de demonstração, e cujo enunciado é apresentado na figura 21. Enquanto seus ensaios estavam sendo examinados sobre "sentenças formalmente indecidíveis do Principia Mathematica", Gödel anunciou a impossibilidade de formalizar a demonstração de consistência. Em julho de 1931 ele estava escalando os Alpes franceses com dois amigos, caiu nas montanhas de granito e morreu. A foto da figura 20 foi tirada momentos antes de sua morte.
O surgimento da teoria da computação começa a tomar forma quando os matemáticos Alonzo Church (1903 - 1995) e Alan Turing (1912 - 1954) publicam um trabalho idealizando a existência de uma máquina perfeita de calcular com memória infinita e processamento instantâneo – estabelecendo –, mesmo, neste caso, que há limitações de computação numérica. Eles partiram dos resultados lógicos já idealizados por Kurt Gödel em 1931 referentes à completeza e incompleteza para desenvolver tal teoria. Dois teoremas importantes estabelecidos por estes matemáticos são: 1) ***Teorema de Church*:** a lógica de predicados ou de primeira ordem é dotada de indecibilidade; 2) ***Tese de Church-Turing:*** deu origem às máquinas de Turing, ou seja, que uma máquina com processamento recursivo não possui um algoritmo geral para dizer sempre 1 ou 0 a uma string qualquer de entrada.

Teorema da Dedução (Herbrand, 1930).

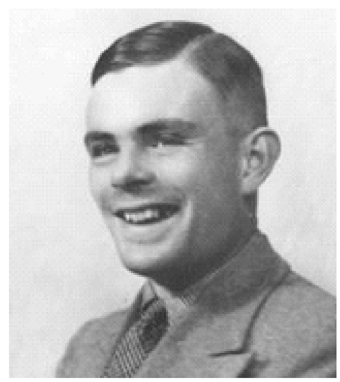
a) Se $A \vdash B$ então $\vdash A \rightarrow B$

Ou, mais geralmente:

b) $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B$, então $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \rightarrow B$

Figura 21 – Enunciado do teorema de Herbrand (e.g., Church, 1956; Cori e Lascar, 2004; Souza, 2005). Neste enunciado, "$\vdash$" é o símbolo de derivabilidade. Assim, "A $\vdash$ B" lê-se da seguinte forma, "B é derivável ou dedutível a partir de A".

Alonzo Church
(1903 - 1995)



Alan Turing
(23 de junho de 1912 – 7 de junho de 1954)

Figura 22 – Alan Turing foi orientado por Alonzo Church.

Na teoria da computabilidade a tese de Church-Turing é uma hipótese sobre a natureza de artefatos mecânicos de cálculo, como computadores, e sobre que tipo de algoritmos eles podem executar. É aceito que um algoritmo computacional deva satisfazer aos seguintes requisitos:
1. o algoritmo deve consistir de um conjunto finito de instruções simples e precisas, devendo ser – necessariamente – descritas também por um número finito de símbolos;
2. o algoritmo sempre produz resultado num número finito de passos;
3. o algoritmo – teoricamente - também poderia ser executado por um ser humano com apenas papel e lápis;
4. a execução não requer inteligência do ser humano além do necessário para entender e executar as instruções.
Para encerrar esta seção a figura 23 ilustra a idéia originalmente concebida por Alan Turing em 1950 e denominado teste de *Turing Total*. Neste experimento um homem e uma máquina são confrontados, e um interlocutor – não podendo identificá-los fisicamente – procede a uma entrevista com sucessões de perguntas. Se no final da entrevista o interlocutor não puder dizer quem é humano e quem é máquina ter-se-á concebido o conceito de inteligência de máquina.
Com o advento do computador e o desenvolvimento da teoria da computação pôde-se dar uma visão geral da mesma através (Ribeiro, 2005): 1) da teoria de *autômatos* e linguagens formais; 2) da teoria da *computabilidade*; 3) da teoria da *complexidade*.

A teoria de autômatos e linguagens formais procuram responder questões do tipo: 1) o que é o computador?; 2) Existem modelos gerais de computadores?; e 3) Como verificar o que o computador faz?. Exemplos elucidativos para isto seriam, por exemplo, autômatos finitos, processamento de texto, projeto de hardware.
A teoria da computabilidade procura identificar e responder a questão de que quais problemas podem ser computáveis e quais não podem. O teorema de Gödel pode ser útil dentro deste contexto. Assim, o que torna alguns problemas computáveis e outros não computáveis? Quais são as conseqüências disto para o projeto do computador?
A teoria da Complexidade tenta diferenciar e explicar questões do tipo: 1) o que torna alguns problemas fáceis e outros difíceis? Como classificar problemas? Por exemplo, em geral, ordenamento enquadra-se dentro dos problemas fáceis, enquanto a alocação de recursos é complexa (Ribeiro, 2005).

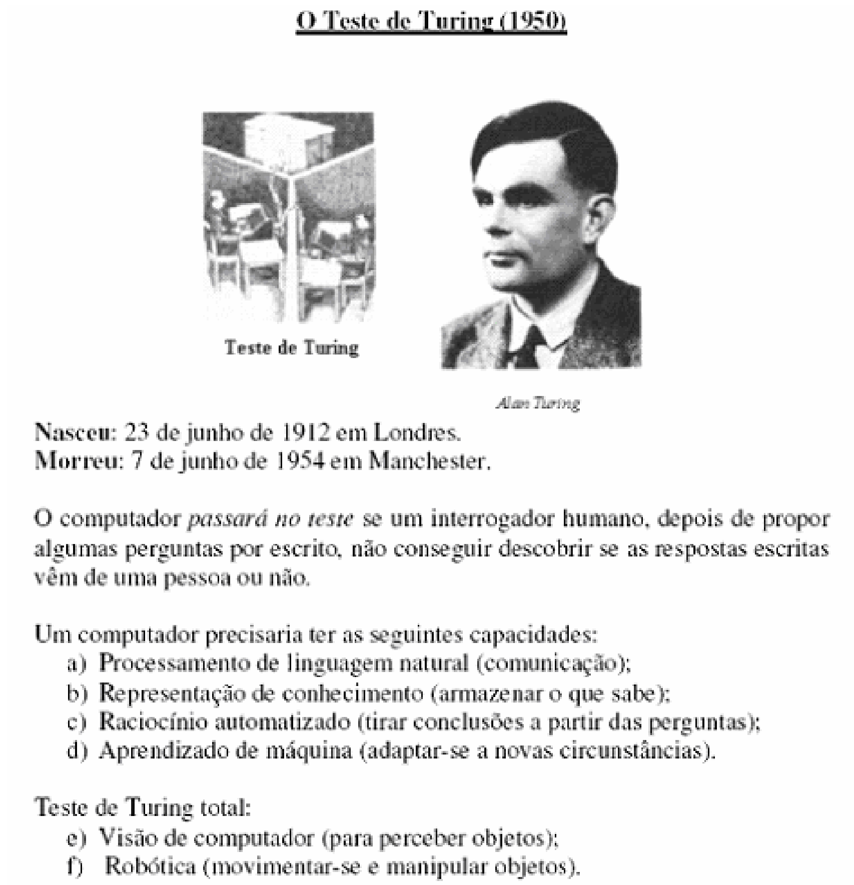
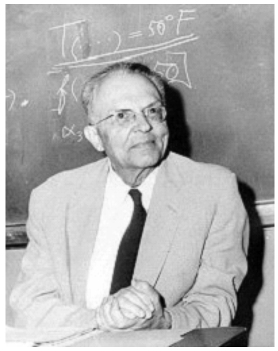
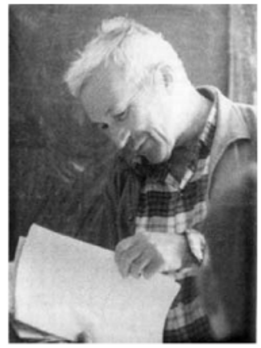


Figura 23 – Esquema ilustrativo descrevendo o teste de *Turing total*.

No estudo da inteligência artificial, muitos problemas são ditos parcialmente observáveis, ou seja, nem toda informação sobre ele pode-se ter prontamente para auxiliar na resolução dos mesmos, principalmente, aqueles que devem ser resolvidos em tempo real, tais como, por exemplo, pilotos automáticos de avião, controle de atitude em satélites artificiais, etc. Neste contexto, o estudo de processos probabilísticos e estocásticos é de grande valia. Um dos grandes feitos do século XX foi introduzir a teoria axiomática das probabilidades na lógica de predicados, feito este, atribuído ao matemático Rudolf Carnap (1891 – 1970). Por sua vez, a teoria das probabilidades foi primeiramente axiomatizada pelo matemático russo Andrei Kolmogorov (1903 - 1987) em 1933. Rudolf Carnap publicou em 1950 o livro *Fundamentos Lógicos da Probabilidade*. Adrei Kolmogorov matemático russo que além de ter axiomatizado a teoria das probabilidades, teve muitos outros trabalhos de peso científico relevantes. Por exemplo, em 1957 provou a existência de *aproximadores universais de funções* e isto acabou dando origem ao ramo da Inteligência Artificial denominado *Redes Neurais Artificiais* (ala conexionista da IA, que se diferencia consideravelmente da IA simbólica). Faleceu em 1987 aos 84 anos de idade. Além da lógica probabilística, outras lógicas, – denominadas não-clássicas – foram desenvolvidas durante a última metade do século XX e que ainda se encontram em desenvolvimento no século XXI. Entre as principais delas estão: a lógica nebulosa (ou *Fuzzy Logic*) e a lógica Paraconsistente. O Prof. Newton da Costa – matemático brasileiro e de vida bastante ativa atualmente no departamento de filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina – é considerado criador da lógica Paraconsistente junto com o polonês S. Jaskowski há aproximadamente 30 anos. A figura 24 trás os retratos dos matemáticos Rudolf Carnap e Andrei Kolmogorov.





Rudolf Carnap
(18 de Maio de 1891 – 14 de novembro de 1970)

Andrei Nikolaevich Kolmogorov
(25 de abril de 1903 – 20 de outubro de 1987)

Figura 24 – Dois grandes matemáticos do séulo XX.

As lógicas não-clássicas possuem papel importante nas *engenharias de sistemas computacionais inteligentes*, pois entre outras coisas admitem graus intermediários de verdades e aceitam – em vários níveis – violar o princípio da não-contradição. Entretanto, isto é uma longa história deixada para uma próxima oportunidade.

5. O Conceito de Inteligência de Máquina.

A crer nas evidências, uma máquina executa impecavelmente as instruções que lhe são fornecidas; ela não poderia, em momento algum, tomar a iniciativa. E, contudo, todo aquele que convive com as máquinas atuais sabe que elas freqüentemente vão além do que se espera, a tal ponto que, às vezes, fica-se perplexo com isto. Com as máquinas modernas, com as técnicas da eletrônica e dos circuitos integrados, o computador miniaturiza-se a ponto de tornar-se impalpável e tudo se passa agora em escala microscópica, inacessível ao olho, num plano abstrato em que a física quântica, as matemáticas e a lógica formal exercem um papel chave. Assim, decidiu-se assimilar a máquina, em seu todo, a um órgão dotado de capacidades lógicas e além disto, as máquinas modernas são imateriais, porque não fazem outra coisa senão transformar seqüências de signos, isto é, textos, independentemente dos suportes sobre os quais eles são escritos e toda comunicação com as máquinas se efetua através de um conjunto de instruções, cada qual compondo frases de um texto, onde apenas a letra do texto é considerada, jamais o espírito (Ganascia, 1997). A conquista das máquinas passa, portanto, por uma linguagem comum ao homem e as máquinas devendo ser ágeis para o primeiro e suficientemente precisas para as últimas. Independentemente de sua realidade material, as máquinas possuem também uma realidade imaterial de ordem lógica, matemática e lingüística (Ganascia, 1997). Acreditando que a máquina jamais suplantará o homem, pois a memória humana não resulta de mera estocagem de informações análoga à que se produz na memória do computador então, não interessa muito pelo que as máquinas sabem fazer, porém, mais do que isto, pelo que as máquinas permitem que o homem faça (Ganascia, 1997). Assim, as máquinas executam tarefas administrativas, elas raciocinam, propõe diagnósticos médicos, estabelecem causas de acidentes. A maior parte das competências humanas podem, pois, ser formuladas em termos lógicos e simuladas no computador; e, isto, deu origem às noções de *Sistema Especialista* e *Engenharia do Conhecimento*. Fabricam-se máquinas comandadas pela voz e que reconhecem o que é dito no fluxo sonoro da fala, mas ainda não estão em condições de aprender um fluxo de fala contínuo, mas, mesmo assim, podem-se comandar robôs enunciando as ordens palavra por palavra. A máquina inteligente seria aquela com a qual seria possível a comunicação através da linguagem escrita, podendo ela interpretar textos e reagir a eles de modo apropriado, por exemplo, respondendo a um conjunto de perguntas sucessivas e, no entanto, há muito tempo tenta-se dotar as máquinas desse domínio da linguagem e não chegando ao fim das dificuldades para este fim. Num artigo escrito em 1950, Alan Turing dá uma definição da inteligência das máquinas: "é inteligente uma máquina que engana e passa por inteligente aos olhos dos homens". Segundo este ponto de vista não se trata mais de saber se uma máquina é efetivamente inteligente ou se ela conhece ou se sente emoções, mas simplesmente de saber se ela pode se parecer como tal e neste sentido não é mais relevante saber se uma máquina pode pensar, mas como construir uma máquina que pareça inteligente (Ganascia, 1997). Para exemplificar esta situação imagine-se num aeroporto internacional de grande movimento onde exista um sistema auxiliado por computador para pousos automáticos de aviões. Assim ao se observar o pouso de um avião em particular, e a partir desta informação não se puder decidir se quem pousou esta aeronave foi uma máquina ou um piloto humano, tem-se aí manifesto o conceito de inteligência de uma máquina. É certo que as máquinas calculam sem cansar, mas para que elas tenham chance de descobrir algo - devido ao crescimento exponencial das combinações possíveis para muitos problemas do mundo real - é preciso fornecer-lhes idéias, eventualmente aproximadas, do sentido daquilo que elas fazem; é preciso dizer-lhes que a busca está "quente" ou "fria"; é preciso dar-lhes uma intuição análoga àquela de que dispõe o arqueólogo que escolhe os locais de escavação (Ganastia, 1997). Em inteligência artificial é importante, portanto, associar os sistemas simbólicos a métodos destinados a ampliar a eficácia dos cálculos e com o risco de omitir soluções. Estes métodos orientam a máquina, indicando a escolha que convém privilegiar. Esses métodos recebem o nome especial de *heurísticas* e esse termo designa técnicas de ajuda à descoberta (Ganascia, 1997). Segundo Leibniz, tudo na natureza procede segundo um cálculo cego sobre sinais, quer se trate dos encadeamentos de causas que regem o universo físico, quer das cadeias de pensamentos que constroem raciocínios. O pensamento é, portanto, redutível ao cálculo. Entretanto, há homens que se reconhecem nulos em matemática, que não jogam damas nem xadrez, que não dominam nenhuma técnica específica e, contudo, escrevem livros, tomam a palavra, governam nações, etc. Em última análise o homem pode dominar e compreender a linguagem enquanto o computador apenas a reproduz e a infere numa velocidade muito superior ao intelecto humano. Apenas sobre os aspectos especulativos, resta agora a questão: para um texto tomar sentido para alguém humano ou alguém máquina não seria necessária a consciência? Entretanto, a consciência em si pode ser definível ou representável lingüística ou matematicamente? Não é a consciência um estado de espírito e da alma humana? Se um dia um robô parar na rua e pedir informação a um humano, entender o que lhe for dito pelo humano e fazer exatamente o que lhe for dito pelo humano e de forma melhorada e dizer obrigado pela informação positiva, terá ele apenas demonstrado uma inteligência ou terá consciência real de sua própria existência e de sua própria inteligência?

6. Conclusões.

Este artigo começou a tomar forma quando o autor resolveu introduzir nas aulas de lógica matemática e inteligência artificial, ministradas no Instituto Tecnológico de Aeronáutica ou ITA, algumas transparências sobre o histórico e desenvolvimento da lógica, teoria computacional e inteligência artificial. Como o autor deste artigo também é coordenador do evento PIBIC e ENCITA da Divisão de Ciência da Computação do ITA e este assunto – do ponto de vista histórico – é muito curioso e chama atenção de muitos alunos e professores que assistem às aulas ministradas aqui, resolve-se por bem publicar alguma coisa deste oratório, deixando-o assim, por escrito. O autor entende que exemplificações e contextos históricos são muito complicados e difíceis de interpretação final, mas ressalta sua importância. Outrossim, houve um esforço e estudo em alguma prática de leitura histórica e técnica para contextualizar o que aqui foi descrito. Sempre é bom frisar que a interpretação técnica consistente dos assuntos abordados – e isto, podendo ser realizado de forma mais fácil do que a histórica – pode auxiliar um pouco e reciprocamente na identificação mais precisa dos fatos históricos. Evidentemente trata-se este, de um artigo muito simples e superficial uma vez que o assunto abordado facilmente cresceria para alguns volumes em livros.

7. Agradecimentos.

O autor agradece ao CNPq pelo constante apoio ao desenvolvimento científico e tecnológico no país. Atualmente o ITA conta com aproximadamente 70 bolsas de iniciação científica para os alunos de graduação. Este financiamento só é possível graças à qualidade constante dos trabalhos que os alunos vêm desenvolvendo nos últimos anos. Agradeço também ao Professor Brett Vern Carlson – coordenador geral do programa PIBIC/ XIV ENCITA 2008 – que pelo segundo ano consecutivo vem demonstrando bastante competência e seriedade na realização e coordenação dos eventos científicos de graduação aqui do ITA.

8. Referências Bibliográficas.

- Blaise Pascal *Pensamentos*. São Paulo, SP: Editora Abril, volume XVI, Enciclopédia Os Pensadores, 1973.
- Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*. V. 1, Princeton: Princeton University Press, 1956.
- Cori, R.; Lascar D. *Mathematical Logic A Course with Exercises Part I*. New York: Oxford University Press, 2004.
- Franco de Oliveira, A. J. *Lógica e Aritmética*. Brasília: Editora UnB, 2004.
- Ganascia, J.-G. *Inteligência Artificial*. São Paulo, SP: Editora Ática, 1997.
- Gödel, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. New York: Dover Publications, Inc., 1992.
- Hegenberg, L. *Lógica O Cálculo de Predicados*. São Paulo: São Paulo: Editora Herder, 1973.
- Hegenberg, L. *Lógica Cálculo Sentencial*. 2. ed., São Paulo: E.P.U.-Editora Pedagógica e Universitária, 1977.
- Nagel, E.; Newman, J. R. *A Prova de Gödel*. 2. ed., São Paulo, SP: Editora Perspectiva S. A., 2001.
- Newton da Costa *Ensaio Sobre os Fundamento da Lógica*. 2. ed., São Paulo, SP: Editora Hucitec, 2008.
- Ribeiro, C. H. C. *Apostila de Autômatos e Linguagens Formais para a Ciência da Computação* ITA-IEC Ciência da Computação, 2005.
- Russell, S.; Norvig, P. *Artificial Intelligence A Modern Approach*. Second Edition, New Jersey: Pearson Education, 2003.
- Silva Filho, J. I. da *Lógica Paraconcistente Anotada*. 1. Ed., Santo, SP: Editora Emmy, 2000.
- Smullyan, R. M. *First-Order Logic*. New York: Dover Publications, Inc., 1995.
- Souza, C. de R. e *Apostila* de *Lógica para a Ciência da Computação*. ITA-IEC Ciência da Computação, 2005.
- Stolyar, A. A. *Introduction to Elementary Mathematical Logic*. New York: Dover Publications, Inc., 1970.